**Chương IV. GIỚI HẠN**

**Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| * + - 1. **Giới hạn hữu hạn**   - khi và chỉ khi có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.  -   * + - 1. **Giới hạn vô cực**   -  khi và chỉ khi u có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.  -  **Chú ý:** thay cho ,  ta viết lim u *= a, lim u =*   * + - 1. **Các giới hạn đặc biệt**   a) lim = 0, lim = 0, lim n = + ∞ với k nguyên dương  b) lim q = 0 nếu  lim q =+∞ nếu  c) lim c = c ( c là hằng số)   * + - 1. **Định lý về giới hạn hữu hạn**   - Nếu limun = a và lim*v = b* thì    - Nếu u ≥ 0 với mọi n và lim *u=a* thì a ≥ 0 và   * + - 1. **Định lý liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực**   - Nếu lim u = a và lim v = thì lim =0  - Nếu lim u = +∞ và lim v = *a >0* thì lim u. v =+∞  - Nếu lim u =a>0 và lim v = *0* và v *>0* với mọi n thì lim =+∞   * + - 1. **Cấp số nhân lùi vô hạn:** là cấp số nhân có công bội q thỏa   Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u ) |

1. **Bài tập**

**Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

**a.** **b.** **c.**



**d.** **e.**  **f.**



**g.** **h.** **i.**



**j.** **k**. **l.**



**m.** **n**.



**Bài 2. Tính các giới hạn sau:**

**a**. **b.** **c.**



**d.**  **e.**  **f.** 



**Bài 3. Tính các giới hạn sau**:

**a.**  **b.** lim 

**c.** **d.**



**e.**  **f.**



**g.**  **h.**



**i.**  **j.**



**k.**   **l**.



**m.** **n.** 



**Bài 4.** Tính các giới hạn sau:

**a.** **b.**  **c.** 



**d.**  **e.**  **f.** 



**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 5. Tính các giới hạn**

**01.**  **02**.   **03**. 

**04**.  **05**.  **06**. 

**07**.  **08**.  **09**. 

**10.**  **11**.  **12**. 

**13**.  **14**.  **15**. 

**16**.  **17**.  **18**. 

**19**.  **20**.  **21**. 

**22**.  **23**.  **24**. 

**25**.  **26**.  **27**. 

**28**.  **29**.  **30**. 

**31**.  **32**. 

**33**.  **34**. 

**35.**  **36**. 

**37**.  **38**. 

**Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Định lí về giới hạn**  **a. Định lí 1**  - Giả sử . Khi đó:+)  +)  +)  - Nếu  và  thì  và .  **b. Định lí 2**    **2. Một vài giới hạn đặc biệt**  **a.**  **b**. (k lẻ)  **c**. (k chẵn)  **3. Quy tắc về giới hạn vô cực** |

**B. Bài tập**

**Giới hạn của hàm số tại một điểm**

**Bài 6. Tính các giới hạn sau:**

**a.  b.  c. **

**d.  e. f.**

**g.  h.  i. **

**Dạng vô định** 

**Bài 7.** Tính các giới hạn sau:

**a. b.  c.**

**d. e.  f.**

**g. h. i.**

**Bài 8.** Tính các giới hạn sau:

**a.  b.  c. **

**d.  e.  f.**

**g.  h.  i.**



**j.  k.  l. **

** n.  o.**

**p.  q.  r. **

**s.  t.  u. **

**Bài 9.** Tính các giới hạn sau:

**a.  b.  c. **

**d. e.  f.**

**g. h.  i.**

**j.  k.  m.**

**n.  o.  p. **

**Dạng vô định **

**Bài 10.** Tính các giới hạn

**a. b. c.**



**d. e. f.**

**g.  h.**

**i.  j. **

**k. l. m.**



**g.  h.  i. **

**Bài 11.** Tính các giới hạn

**a. b. c.**

**d.  e.  f. **

**g. h. i.**

**j. k. l.**

**Dạng vô định **

**Bài 12.** Tính các giới hạn

**a.  b.**

**c.  d. **

**e. f. **

**g. h. **

**i.  j. **

**k.  l.**

**m.  n.**

**o. p.**

**q. r.**

**Giới hạn một bên**

**Bài 13.** Tính các giới hạn

**a. b. c. d.**

**e. f. g. h.**

**C. Bài tập tự luyện**

**Bài 14.** Tính các giới hạn

**01.  02.  03. **

**04.  05. 06.**

**07.  08.  09. **

**10. 11.  12.**

**13. 14.  15.**

**16. 17. 18.**

**19.  20.  21. **

**22.  23.  24.**

**25.  26.  28. **

**29.  30.  31. **

**32. 33.  34. **

**35.  36.  37. **

**38.  39.  40. **

**41. 42.  43.**

**44.  45.  46.**

**47.  48.  49.**

**50.  51. 52.**

**53. 54. 55.**

**60. 61. 62.**

**63.  64.  65. **

**66. 67. 68.**

**69.  70.  71. **

**72. 73. 74.**

**75. 76. 77.**

**78.  79.**

**80.  81. **

**82.  83.**

**84.  85. **

**86. 87. **

**88. 89. **

**90.  91. **

**92.  93.**

**94.  95.**

**96. 97.**

**Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC**

**A.Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **1. Định nghĩa**  Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K và x ∈ K  f(x) liên tục tại x ⇔  - Hàm số liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó  - Hàm số liên tục trên đoạn [a;b] nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và ,  **2. Các định lý**  **a. Định lý 1**  - Hàm đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực.  - Hàm phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng  **b.** **Định lý 2**  Giả sử y=f(x)và y=g(x) là hai hàm số liên tục tại điểm xo . Khi đó:  - Các hàm số f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x). g(x) cũng liên tục tại xo.  - Hàm số liên tục tại xo nếu g(xo)**≠** 0  **c.** **Định lý 3**  Nếu hàm số y=f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a)f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a;b) sao cho f(c)=0. |

**B. Bài tập**

**Bài 15.** Xét tính liên tục của hàm số tại x :

**a.  ,**  x0 = 4  **b. ** , x = 1

**c. ** , x = 1 **d. **, x = 1

**e. ** , x0 = 2  **f. ** , x0 = 1

**g.** , x0 = 1  **h.** , x0 = 2

**Bài 16.** Tìm m để các hàm số sau đây liên tục tại x :

**a. ** , x0 = 1 **b.**, x0 = 1

**c. ** , x0 = -1 **d. ,** xo = 2

**e. ** , xo = 0

**Bài 17.** Chứng minh rằng:

**a.** Pt  coù ít nhaát 1 nghieäm

**b.** Pt  coù 3 nghieäm thuoäc 

**c.** Pt  coù ít nhaát 2 nghieäm thuoäc 

**d.** Pt  coù 2 nghieäm thuoäc 

**e.** Pt  coù 5 nghieäm phaân bieät

**f.** Pt x5 - 3x4 + 5x – 2 = 0 coù ít nhaát 3 nghieäm trong khoaûng (-2; 5)

**g.** Pt  coù nghieäm

**h.** Pt  coù nghieäm

**B. Bài tập tự luyện**

**Bài 18.** Xét tính liên tục của hàm số tại x :

**a.  ,** x0 = 5 **b. ** , x = 6

**c. ** , x = 1 **d.** , x = 1

**e. **  , x0 = 2  **f. **  , x0 = 1

**Bài 19.** Tìm m để các hàm số sau đây liên tục tại x :

**a. ** , x0 = 1 **b.**, x0 = 1

**c. ** , x0 = -1 **d. ** , xo =2

**e. ** , xo = 0

**Chương V. ĐẠO HÀM**

**A. Tóm tắt lý thuyêt**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. Định nghĩa:**    **2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa:**  Bước 1: Với Δ*x* là số gia của đối số tại xo, tính Δ*y= f(xo+Δx)-f(xo).*  Bước 2: Lập tỉ số  Bước 3: Tính  **3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:**  **-** là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y=f(x)* tại điểm M*(xo, f(xo))*  - Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M*(xo, f(xo))* là:  - Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: thì hệ số góc của tiếp tuyến  - Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d: thì hệ số góc của tiếp tuyến   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **4. Các quy tắc tính đạo hàm** | **5. Công thức tính đạo hàm**   |  |  | | --- | --- | |  |  | |   **6. Đạo hàm cấp cao:** |

**B. Bài tập**

**1.** Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

**a.** y = f(x) = x2 – 3x taïi xo = 1 **b.** y = f(x) = x3 taïi xo =-2

**c.** y = f(x) =  taïi xo = –1  **d.** y =  taïi xo = 2

**2.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau taïi  (duøng coâng thöùc) :

**a.**  **b.**

**c.**  **d.**, x =2

e.  **f.** , 

**3.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a**. y = f(x) = 3x2 – 5x + 1 **b.** y **=** f(x) = x4 –x3 + 1

**c. y = f(x) =  d.**

**e.  f. **

**g. h. **

**i.  j. **

**k.  l. **

**m.  n. **

**o. p. **

**q. r. **

**s.  t. **

**4.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a.** **b.** **c.**

**d.** **e.** **f.**

**g.** **h**. **i**.

**j.** **k**. **l**.

**m.** **n.** **o.**

**p**. **q.** **r.**

**s.** **t.** **u.**

**5.** Tính ñaïo haøm caùc haøm soá sau:

**a.** **b.**

**c.** **d.**

**e.** **f.**

**g**. **h.** **i.**

**j**. **k.** **l.**

**m**. **n.** **o.**

**p**. **q.**  **r.**

**s**. **t**. **u**.

**v.** **x.** **y.**

**6.** Giải các bất phương trình sau:

**a.**  với  **b.**  với 

**c.** với  **d.** với 

**7. a.** Cho . Tính f”(2), f’(-1)+2f”(1).

**b.** Cho f(x)=sin3x. Tính f”(-  ), f”(0), f”()

**8.** Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

**a.** **b.** **c.** **d.**

**e.** y= tanx **f.** y= cos x **g.** **h.**

**9.** Cho các hàm số sau, hãy chứng minh đẳng thức:

**a.**. CMR: 

**b.** CMR: y y”+1=0

**c.** y=xsinx. CMR: xy-2(y’-sinx)+xy”=0

**d.** y=2xcosx. CMR: y’sinx-ycosx+2x-sin2x=0.

**10.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị các hàm số sau:

**a.**  tại điểm có hoành độ x =2.

**b.** tại điểm có hoành độ x =-2.

**c.** tại điểm có tung độ y =3.

**d.** tại điểm có hoành độ y =1.

**11.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung:

**a.**  **b.** 

**c.**  **d.** 

**12**. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành:

**a.** **b.**

**c.** **d.**

**13.** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

**a.** biết tiếp tuyến có hệ số góc k=9.

**b**. (C): y= x biết tiếp tuyến có hệ số góc k=3.

**c.** (C)y= biết tiếp tuyến có hệ số góc k= - .

**14**.Viết phương trình tiếp tuyến của  biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**15**. Cho (C) : y = f(x) =  .

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng y = 

**b.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) song song vôùi ñöôøng thaúng 3x+y-7=0.

**16.** Cho . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng phaân giaùc thöù hai cuûa heä truïc toïa ñộ.

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi .

**C. Bài tập tự luyện**

**17.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

  

**18.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị các hàm số sau:

**a.**  tại điểm có hoành độ x = -2.

**b.** tại điểm có hoành độ x = 1.

**c.** tại điểm có tung độ y = -3.

**d.** tại điểm có hoành độ y =1.

**e.** tại điểm có hoành độ y = 2.

**f.**  tại điểm có hoành độ x = -2.

**g.**  tại điểm có tung độ y = 2.

**h.**  tại điểm có hoành độ x = -1.

**i.**  tại điểm có tung độ y = -1.

**19**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A(0;4).

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 3

**20**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có tung độ bằng 4.

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: y = 3x+9.

**21**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 0.

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: y = 5x-1.

**22**. Cho hàm số  có đồ thị (C)

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M(-1;2).

**b**. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng

d: 2x-y+9=0.

**23**.Viết phương trình tiếp tuyến của  biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**24**. Cho (C) :  .

**a.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng 

**b.** Viết phương trình tiếp tuyến cuûa (C) song song vôùi ñöôøng thaúng 20x-y +1=0.

**25**.Cho . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

**a.** Tieáp tuyeán song song vôùi .

**b.** Tieáp tuyeán vuoâng goùc vôùi .

**26.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**27.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**28.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**29.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**30.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**31.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**32.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**33.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**34.** Cho hàm số . Giải bất phương trình:

**35.** Cho hàm số . Giải phương trình:

**36.** Cho hàm số . Chứng minh:

**a.** .

**b.** .

**37.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**38.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**39.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**40.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**41.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**42.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**43.** Cho hàm số . Chứng minh:.

**HÌNH HỌC**

**CHÖÔNG 3. QUAN HEÄ VUOÂNG GOÙC**

**§1. VECTÔ TRONG KHOÂNG GIAN**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I. Ñònh nghóa:**  Vectô trong khoâng gian laø moät ñoaïn thaúng ñònh höôùng. Ñoù laø ñoaïn thaúng ñöôïc chæ roõ ñieåm ñaàu vaø ñieåm cuoái.  Caùc khaùi nieäm coù lieân quan ñeán vectô, ñoä daøi cuûa vectô, hai vectô cuøng phöông, hai vectô baèng nhau, vectô – khoâng ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö trong maët phaúng.  **II. Pheùp coäng hai vectô trong khoâng gian:**  **1. Ñònh nghóa:** Pheùp coäng 2 vectô trong khoâng gian ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö pheùp coäng 2 vectô trong maët phaúng.  **Tính chaát:**  (i)  (giao hoaùn) (ii)  (keát hôïp) (iii)  **2.Caùc ñònh lyù:**  **a.Quy taéc ba ñieåm** ( heä thöùc Chasles): A, B, C ta coù:  **b.Quy taéc hình bình haønh:**  ABCD hình bình haønh  **III.Pheùp nhaân vectô vôùi moät soá:**  **1.Ñònh nghóa:** Pheùp nhaân vectô vôùi moät soá trong khoâng gian ñöôïc ñònh nghóa töông töï nhö pheùp nhaân vectô vôùi moät soá trong maët phaúng.  **Tính chaát:**  1.  ;  2.  3. (k + 1)  4.  **2.Caùc ñònh lyù:**  **a.Quy taéc trung ñieåm**: Cho I laø trung ñieåm cuûa AB vaø O laø ñieåm tuyø yù. Ta luoân coù:  **b.Quy taéc troïng taâm:**  Goïi G laø troïng taâm tam giaùc ABC, ta coù:  i.  ii.  **IV.Söï ñoàng phaúng cuûa 3 vectô**  **1.Ñònh nghóa:**Ba vectô ñöôïc goïi laø ñoàng phaúng neáu 3 ñöôøng thaúng chöùa chuùng cuøng song song vôùi moät maët phaúng.  *Chuù yù:* Cho 3 vectô . Laáy moät ñieåm O tuøy yù, döïng . Khi ñoù  ñoàng phaúng khi vaø chæ khi 4 ñieåm O, A, B, C ñoàng phaúng.  **2.Ñònh lyù 1:**Cho 3 vectô  trong ñoù  khoâng cuøng phöông. Khi ñoù:  ñoàng phaúng .  **3.Ñònh lyù 2:**Cho 3 vectô khoâng ñoàng phaúng . Khi ñoù vôùi moïi vectô  ta ñeàu coù  trong ñoù  xaùc ñònh moät caùch duy nhaát.  **V.Tích voâ höôùng cuûa 2 vectô trong khoâng gian:**  **1.Ñònh nghóa:** Cho hai vectô .Tích voâ höôùng cuûa  vaø  laø moät soá thöïc, kyù hieäu , ñöôïc xaùc ñònh nhö sau:  **2.Tính chaát:**  i.  (giao hoaùn)  ii.  (Phaân phoái ñ/v pheùp coäng)  iii. |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

***Baøi toaùn 1:*** *Chöùng minh ñaúng thöùc vectô:*

Phöông phaùp:

Söû duïng quy taéc 3 ñieåm  ñeå ñöa caùc vectô veà cuøng goác. Khoâng neân choïn goác laø trung ñieåm hay troïng taâm.

Duøng quy taéc hình bình haønh, quy taéc trung ñieåm, quy taéc troïng taâm ñeå bieán ñoåi thaønh ñaúng thöùc vectô ñuùng

***Ví duï 1****:* Cho töù dieän ABCD. Goïi E, F laø trung ñieåm cuûa AB vaø CD. G laø trung ñieåm EF (G goïi laø troïng taâm cuûa töù dieän). Chöùng minh: 

***Baøi toaùn 2:*** *Phaân tích moät vectô theo caùc vectô cuøng goùc cho tröôùc:*

Phöông phaùp: Phaân tích vectô  theo caùc vectô  cuøng goác

Bieán ñoåi caùc giaû thieát thaønh heä thöùc vectô

Bieán ñoåi vectô  veà goác chung.

Trieät tieâu trung ñieåm, troïng taâm.

Thay theá caùc giaû thieát vaøo.

***Ví duï 2:***Cho töù dieän ABCD. Treân caùc caïnh AB, AC, AD laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N, P sao cho MA=2MB, AC=4AN, PD=3PA. Goïi G laø troïng taâm tam giaùc MNP. Phaân tích  theo .

***Baøi toaùn 3:*** *Moät soá aùp duïng cuûa tích voâ höôùng:*

Chöùng minh 2 vectô vuoâng goùc: Ñeå chöùng minh 2 vectô  vuoâng goùc, ta chöùng minh .

Tính ñoä daøi ñoaïn thaúng: Ñeå tính ñoä daøi ñoaïn thaúng AB ta tính .

Tính goùc taïo bôûi 2 vectô: Ta duøng coâng thöùc 

***Ví duï 3:***Cho töù dieän ABCD.

a. Chöùng minh raèng: 

b. Chöùng minh raèng neáu töù dieän ABCD coù 2 caëp caïnh ñoái vuoâng goùc thì caëp caïnh ñoái hou 3 cuõng vuoâng goùc.

**B. Bài tập**

1. Cho hình hoäp ABCD.A’B’C’D’. Laáy ,  sao cho , . Tính  theo caùc vectô .
2. Cho hình laäp phöông ABCD.A’B’C’D’

a. M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD vaø BB’. Chöùng minh .

b. Goïi E, F laàn löôït laø 2 ñieåm thuoäc AD vaø BB’ sao cho AE=BF. Chöùng minh  ñoàng phaúng.

1. Cho hình hoäp ABCD.A’B’C’D’. Goïi I, K laàn löôït laø taâm cuûa hình bình haønh AA’B’B vaø BCC’B’. Chöùng minh raèng:  ñoàng phaúng.
2. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình vuoâng. Taát caû caùc caïnh cuûa hình choùp ñeàu baèng a. Tính caùc tích voâ höôùng sau: , , .

**§2: HAI ÑÖÔØNG THAÚNG VUOÂNG GOÙC**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I.Goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng trong khoâng gian** : Goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng trong khoâng gian laø goùc hôïp bôûi hai ñöôøng thaúng cuøng phöông vôùi chuùng, xuaát phaùt töø cuøng moät ñieåm. Kyù hieäu:  *Chuù yù:*  -Ñeå xaùc ñònh goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng, ta coù theå choïn ñieåm O thuoäc moät trong 2 ñöôøng thaúng, qua O döïng ñöôøng thaúng song song vôùi ñöôøng thaúng coøn laïi.  -  **II.Hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc:**  **Ñònh nghóa:** Hai ñöôøng thaúng goïi laø vuoâng goùc neáu goùc cuûa chuùng laø .    ***Chuù yù:***    b) Hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc coù theå cheùo nhau. |

**PHÖÔNG PHAÙP GIAÛI TOAÙN**

***Baøi toaùn 1:*** *Tính goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng a vaø b:*

Phöông phaùp:

B1: Döïng goùc taïo bôûi a vaø b:

Choïn ñieåm O tuøy yù (thöôøng ta choïn O thuoäc moät trong 2 ñöôøng thaúng a, b)

Qua O döïng .

Ta coù 

B2: Tính goùc:

Tính goùc  baèng caùch ñaët vaøo moät tam giaùc roài duøng ñònh lyù haøm cos, caùc heä thöùc löôïng trong tam giaùc vuoâng ñeå tính.

Neáu  thì 

Neáu  thì 

***Ví duï 1:***Cho hình choùp S.ABC coù SA=SB=SC=AB=AC=a vaø BC=. Tính goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng SC vaø AB.

***Baøi toaùn 2:*** *Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc:*

|  |
| --- |
| Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc ta thöôøng xaùc ñònh goùc giöõa 2 ñöôøng thaúng ñoù roài duøng ñònh lyù Py-ta-go ñeå chöùng minh goùc ñoù laø goùc vuoâng |

***Ví duï 2:***Cho hình choùp S.ABC coù SA=SB=SC vaø . Chöùng minh raèng: 

**B. Bài tập**

1. Cho töù dieän ABCD, goïi M, N laø trung ñieåm cuûa BC vaø AD. Bieát AB=CD=2a vaø . Tính goùc taïo bôûi AB vaø CD.
2. Cho töù dieän ABCD ñeàu caïnh a. Goïi I, J, K laø trung ñieåm cuûa BC, CA, AD.

a. Tính IK

b. Chöùng minh tam giaùc IJK vuoâng caân. Suy ra caùc caëp caïnh ñoái trong töù dieän ñeàu vuoâng goùc vôùi nhau.

1. Cho töù dieän ABCD coù AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c.

a. Chöùng minh caùc ñoaïn noái trung ñieåm caùc caëp caïnh ñoái thì vuoâng goùc vôùi 2 caïnh ñoù.

b. Tính cos goùc taïo bôûi AB vaø CD.

1. Cho töù dieän ABCD ñeàu caïnh a, goïi M laø trung ñieåm cuûa BC, O laø taâm ñöôøng troøn ngoaïi tieáp tam giaùc BCD. Tìm goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng AB vaø DM, goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng AO vaø CD.
2. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng. Taát caû caùc caïnh beân vaø caïnh ñaùy ñeàu baèng a. Chöùng minh:  vaø 

**§3: ÑÖÔØNG THAÚNG VUOÂNG GOÙC MAËT PHAÚNG**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

**Baøi toaùn 1: Chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc maët phaúng:**

Phöông phaùp : Ñeå chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc maët phaúng ta chöùng minh ñöôøng thaúng vuoâng goùc vôùi 2 ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng. 

**Baøi toaùn 2: Chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc:**

Phöông phaùp: Ñeå chöùng minh 2 ñöôøng thaúng vuoâng goùc ta chöùng minh ñöôøng thaúng naøy naèm trong maët phaúng vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng kia. 

***Ví duï 2:***Cho töù dieän S.ABC coù tam giaùc ABC vuoâng taïi B vaø .

a. Chöùng minh: 

b. Chöùng minh tam giaùc SBC laø tam giaùc vuoâng taïi B.

c. Goïi AH laø ñöôøng cao cuûa tam giaùc SAB. Chöùng minh: .

**Bài toán 3 :** **Phöông phaùp xaùc ñònh goùc giữa đường thẳng và maët phaúng**

|  |
| --- |
| *Tröôøng hôïp 1: Đường thẳng vuông góc với mp thì góc giữa chúng bằng 900*  *Tröôøng hôïp 2: Đường thẳng không vuông góc với mp thì*  B1: Tìm a’ là hình chiếu của a lên (P) .  B2: Góc giữa đường thẳng a và mp (P) là góc giữa đường thẳng a và a’ ( hình chiếu của a lên (P) ) |

**B. Bài tập**

1. Cho hình chóp SABCD , ABCD là hình vuông cạnh a , . Chứng minh

a) b)  c) 

1. Cho hình chóp SABCD , ABCD là hình vuông cạnh a , , SB = 2a .Goi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên SA , SC . Chứng minh

a) b)  c)  d)

e) Xác định và tính góc giữa SC và (ABCD) .

f) Xác định và tính góc giữa SD và (ABCD) .

g) Xác định và tính góc giữa SO và (ABC) .

h) Xác định và tính góc giữa AC và (SBD) .

1. Cho töù dieän ABCD coù 2 maët ABC vaø DBC laø 2 tam giaùc caân chung ñaùy BC, goïi I laø trung ñieåm BC.

a. Chöùng minh  b. Keû ñöôøng cao AH trong tam giaùc ADI. Chöùng minh 

1. Cho hình choùp SABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuong taâm O, cạnh a , vôùi SA = SC, SB = SD, SB = 2a , Chöùng minh:

a.  b.  c. Tính góc giữa đường thẳng SD và ( ABCD).

1. Cho töù dieän ABCD coù . Goïi H laø tröïc taâm tam giaùc BCD. Chöùng minh:

a.  b. 

1. Cho hình choùp SABC coù  vaø caùc caïnh coøn laïi ñeàu baèng a. Goïi I laø trung ñieåm BC.

a. Chöùng minh:  b.Chöùng minh c. Tính góc giũa SA và (ABC).

1. Cho töù dieän OABC coù caùc caïnh OA, OB, OC ñoâi 1 vuoâng goùc vôùi nhau. Goïi H laø ñieåm thuoäc (ABC) sao cho . Chöùng minh raèng:

a.  b. H laø tröïc taâm tam giaùc ABC c. 

1. Cho hình choùp SABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng taâm O, cạnh 2a ,  . Goïi H, I, K laàn löôït laø hình chieáu vuoâng goùc cuûa A treân SB, SC, SD.

a. Chöùng minh: 

b. Chöùng minh AH, AK cuøng vuoâng goùc vôùi SC. Töø ñoù suy ra 3 ñöôøng thaúng AH, AK ,AI cuøng chöùa trong 1 maët phaúng.

c. Chöùng minh:  töø ñoù suy ra .

d. Tính góc giữa SD và ( ABCD). e . Tính góc giữa SC và ( ABCD).

f. Tính góc giữa CB và ( SAB). g. Tính góc giữa AC và ( SAB).

1. Cho töù dieän SABC coù . Goïi H, K laàn löôït laø tröïc taâm tam giaùc ABC vaø SBC. Chöùng minh raèng: a. AH, SK vaø BC đồng quy. b.  c. 

8. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc (ABCD), . Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b)SC và (SAB) c)SB và (SAC) d)ACvà (SBC).

9. Cho hình chóp SABC, SA vuông góc đáy, tam giác ABC vuông tại B, AB = a, AC = 2a, . Tính góc giữa:

a) SB và (ABC) b)SC và (ABC) c)SC và (SAB)

§**4 : HAI MAËT PHAÚNG VUÔNG GÓC**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| **I.Ñònh nghóa:**  Goùc giöõa 2 maët phaúng laø goùc taïo bôûi 2 ñöôøng thaúng laàn löôït vuoâng goùc vôùi 2 maët phaúng. Kyù hieäu laø:    **II.Phöông phaùp xaùc ñònh goùc taïo bôûi 2 maët phaúng:**  *Tröôøng hôïp 1: Hai maët phaúng song song:* Neáu (P)//(Q) thì  *Tröôøng hôïp 2: Hai maët phaúng caét nhau:*  B1: Tìm giao tuyeán  cuûa (P) vaø (Q).  B2: Döïng maët phaúng  vuoâng goùc vôùi .  B3: Tìm giao tuyeán a cuûa (P) vaø , giao tuyeán b cuûa (Q) vaø . Goùc giöõa a vaø b laø goùc giöõa (P) vaø (Q).  **III. Ñònh lyù veà dieän tích hình chieáu:**  Goïi S laø dieän tích cuûa ña giaùc (H) trong maët phaúng (P) vaø S’ laø dieän tích hình chieáu (H’) cuûa (H) treân (P’). Khi ñoù ta coù:  ***IV. Chöùng minh 2 maët phaúng vuoâng goùc:***  Phöông phaùp : Ñeå chöùng minh 2 maët phaúng vuoâng goùc ta chöùng minh maët phaúng naøy chöùa ñöôøng thaúng vuoâng goùc vôùi maët phaúng kia. |

**B.Bài tập**

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình thang vuoâng taïi A, B vôùi AB = BC = a, AD = 2a,  vaø . Goïi I laø trung ñieåm SC.

a. Chöùng minh: 

b. Tính goùc giöõa 2 maët phaúng (ABCD) vaø (SCD)

1. Cho hình choùp S.ABC coù ñaùy laø tam giaùc vuoâng taïi C, maët beân SAC laø tam giaùc ñeàu vaø naèm trong maët phaúng vuoâng goùc vôùi maët phaúng (ABC).

a. Chöùng minh: 

b. Goïi I laø trung ñieåm cuûa SC. Chöùng minh raèng 

1. Cho töù dieän ABCD coù caïnh AB vuoâng goùc vôùi maët phaúng (BCD). Trong tam giaùc BCD, veõ ñöôøng cao BE vaø DF caét nhau taïi O. Trong maët phaúng (ACD) veõ DK vuoâng goùc AC taïi K. Goïi H laø tröïc taâm cuûa tam giaùc ACD.

a. Chöùng minh , 

b. Chöùng minh .

1. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy laø hình thoi taâm I, caïnh a vaø goùc A baèng 60, caïnh  vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (ABCD).

a. Chöùng minh 

b. Trong tam giaùc SAC keû IK vuoâng goùc vôùi SA taïi K. Tính ñoä daøi IK.

c. Chöùng minh . Töø ñoù suy ra .

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*,  H là trung điểm của AB, SH = HC, SA = AB. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) .
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a góc BAD = 600 và SA = SB = SD = 
3. CMR: (SAC)(ABCD)
4. CMR SBBC
5. Tính tan của góc giữa hai mp(SBD) và (ABCD)
6. Cho hình chóp S.ABCD có (SAB) và (ABCD) nằm trong hai mp vuông góc, ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S. Gọi M,N là trung điểm của AB và DC
7. Chứng minh DC(SMN)
8. Tính góc giữa đường thẳng SN với mp(ABCD)
9. Tính góc giữa 2mp(SMC) và (ABCD)

**KHOẢNG CÁCH**

**A. Tóm tắt lý thuyết**

|  |
| --- |
| * Tính các khoảng cách giữa một điểm và mặt phẳng   *Phương pháp :* Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng , ta phải đi tìm đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến mặt phẳng , ta hay dùng một trong hai cách sau :   * *Cách 1 :* d(M, (P)) = MH   + - Tìm một mặt phẳng *(Q)* chứa *M* và vuông góc với *(P)* .     - Xác định .     - Dựng ,     - suy ra *MH* là đoạn cần tìm .      * *Cách 2:* Dựng    + *Chú ý :* * Nếu . * Nếu * Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng: * *Khi*  . * *Khi*   với  .   * Khoảng cách từ một mặt phẳng đến một mặt phẳng : * *Khi*  . * *Khi*    với  . * Khoảng cách giữa hai đường thẳng * *Khi*  . * *Khi*  với  .   ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :***   * Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  và  là đường thẳng  cắt ở và cắt   ở  đồng thời vuông góc với cả và . * Đoạn  được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường  thẳng chéo nhau và . * Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn  vuông góc chung của hai đườngthẳng đó .   ***Phương pháp :***   * *Cách 1 :* Dựng mặt phẳng *(P)* chứa đường thẳng *a* và song song với *b* .Tính khoảng cách từ *b* đến *mp(P) .* * *Cách 2 :* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm . * Cách 3 : Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó .   Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau :   * *Cách 1:* Khi * Dựng một tại *H* . * Trong *(P)* dựng tại *K* . * Đoạn *HK* là đoạn vuông góc  chung của *a*  và *b* . * *Cách 2:* * Dựng . * Dựng , bằng cách lấy  dựng đoạn  , lúc đó *a’* là  đường thẳng đi qua *N* và song song *a* . * Gọi , dựng   là đoạn vuông góc chung cần tìm . |

**B. Bài tập**

**1.** Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, , SA = 2a,

a) Tính  b) Tính  c.Tính d( B,(SCD))

**2.** Cho lăng trụ ABCD.A’B’C’D’, ABCD là hình chữ nhật, . Hình chiếu vuông góc của A’ trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Tính 

**3.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, ,  là tam giác đều cạnh a, . Tính 

**4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = a, CD = 2a, , SD = a.

a) Tính  b) Tính 

**5.** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và ,, các mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng .  
 a) Chứng minh  .  
 b) Chứng minh .  
 c) Chứng minh các mặt bên của hình chóp  đều là các tam giác vuông .  
 d) Khi  . Tính góc giữa  với mặt phẳng  và góc giữa hai mặt phẳng  và  .   
 e) Tính các khoảng cách : 

**6.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a, . Tính 

**7.** Cho tứ diện ABCD có AB = a, tất cả các cạnh còn lại bằng 3a. Tính 

**8.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM, . Tính 

**9.** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, . Tính 

**10.** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng . Tính 

**11.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính 

**ÔN TẬP CUỐI NĂM**

**1.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC vuông cân *tại A, AB = , SC ⊥ (ABC), SC = 2a.* M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh: AM ⊥ SB.
2. Gọi H là hình chiếu của M trên SB. Chứng minh: (SAB) ⊥ (AMH)
3. Tính tang của góc hợp bởi (SBC) và (SBA).
4. Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

**2.** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

1. Chứng minh: BD ⊥ SC
2. Tình cos góc giữa mặt bên và mặt đáy.
3. Tính của góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
4. Tính cosin của góc hợp bởi hai mặt bên.
5. Tính khoảng cách giữa BD và SC.
6. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

**3.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh *2a, SB* ⊥ (ABC)*, SB = a.* Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

1. Chứng minh: AC ⊥ SN.
2. Chứng minh: (SAB) ⊥ (SCM)
3. Tính góc hợp bởi (SCM) và (CBA).
4. Tính tang của góc hợp bởi (SCA) và (SBA).
5. Tính khoảng cách từ A đến (SCM).

**4 .** Cho hình chóp tam giác S.ABC có ABC là tam giác vuông tại C, góc ABC = 300, SA *⊥ (ABC),*

*SA = AC = a.* Hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SC, SB.

1. Chứng minh SBC là tam giác vuông
2. Chứng minh: (AHK) ⊥ (SBC).
3. Chứng minh: (AHK) ⊥ (SAB)
4. Tính sin của góc hợp bởi (SAB) và (SBC).
5. Tính khoảng cách từ H đến (SAB).

**5.** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, AB = , AD = *2a*. Điểm H là trung điểm của AD, SH ⊥ (ABCD) và SH = *a*.

1. Chứng minh SAD là tam giác vuông cân.
2. Chứng minh: (SAD) ⊥ (SAB).
3. Tính góc hợp bởi (SAB) và (ABCD), (SBC) và (ABCD).
4. Tính khoảng cách giữa AB và SD.
5. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

**6 .** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA⊥(ABCD). Biết SA = AB = *a, BC =* .

1. Chung minh: BD⊥SC và AD⊥SB.
2. Chứng minh: (SAD) ⊥(SCD).
3. Tính góc giữa SB và (SAD).
4. Tính tang của góc giữa (SBD) và (ABCD).
5. Tính khoảng cách giữa AB và SC.
6. Tính khoảng cách từ C đến (SBD).

**7**. Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và , các mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng .  
a) Chứng minh  .  
b) Chứng minh .  
c) Chứng minh các mặt bên của hình chóp  đều là các tam giác vuông .  
 d) Khi  . Tính góc giữa  với mặt phẳng  và góc giữa hai mặt phẳng  và  .   
e) Tính các khoảng cách :  .